数理解析研究所講究録
第 1632 巻 2009 年 88-95

p-Hyponormal 作用素の構造定理について

長　宗雄　神奈川大学・工
Muneo Chō　Kanagawa University
古谷　正　新潟大学・教育
Tadasi Huruya　Niigata University

1. 初めに. $T=U|T|$ を Hilbert 空間上の（有界）作用素で,

$$|T|-U|T|U^{*}\geq 0$$

が成立するとき, T を semi-hyponormal と呼ぶ. このとき,

$$\|T\|I\geq U^{*n}|T|U^{n}\geq\cdots\geq U^{*}|T|U\geq|T|\geq U|T|U^{*}\geq\cdots\geq U^{n}|T|U^{*n}\geq 0$$

より

$$\mathcal{S}_{U}^{\pm}(|T|)=\text{s-}\lim_{n\rightarrow\pm\infty}U^{*n}|T|U^{n}$$

が存在し, これらの作用素 $\mathcal{S}_{U}^{\pm}(|T|)$ は U に関する $|T|$ の polar symbol と呼ぶ. ここでは, $|T|_{+}=\mathcal{S}_{U}^{+}(|T|), |T|_{-}=\mathcal{S}_{U}^{-}(|T|)$ で略記す. また, $T_{+}=\mathcal{S}_{U}^{+}(T), T_{-}=\mathcal{S}_{U}^{-}(T)$ と置くと, $T_{+}=U|T|_{+}, T_{-}=U|T|_{-}$ である. $T=U|T|$ を Hilbert 空間上の作用素で, $p>0$ であり,

$$|T|^{2p}-(U|T|U^{*})^{2p}\geq 0$$

が成立するとき, T を p-hyponormal と呼ぶ. 1-hyponormal 作用素を hyponormal, 1/2-hyponormal 作用素を semi-hyponomarl とも呼ばれる. $p>q>0$ のとき, p-hyponormal 作用素は q-hyponormal である. ここでは, $1/2\geq p>0$ の p-hyponormal 作用素を扱う.

T が p-hyponormal で unitary 作用素 U を使って $T=U|T|$ と表されるとき, $T\in p$-HU, 特に semi-hyponormal の場合は, $T\in$SHU で表す.

2. 構造定理. p-hyponormal 作用素の構造定理を述べるための準備からはじめる. $\mathbf{T}=\{e^{i\theta}|0\leq\theta<2\pi\}$ とし, $\mathcal{F}$ を $\mathbf{T}$ の Borel 集合全体, Lebesque 測度 m, すなわち, $dm(e^{i\theta})=\dfrac{1}{2\pi}d(e^{i\theta})$ とし, ν はその特異測度で $\mu=m+\nu$ の形の測度とし, $\Omega=(\mathbf{T},\mathcal{F},\mu)$ を測度空間とする. このとき, μ に関して可分な Hilbert 空間 $\mathcal{D}$ に値を持つ強可測な関数で $\int_{\mathbf{T}}\|f(e^{i\theta})\|^{2}d\mu<\infty$ を満たす関数 f 全体に内積 $(f,g)=\int_{\mathbf{T}}(f(e^{i\theta}),g(e^{i\theta}))_{\mathcal{D}}d\mu$ を入れた Hilbert 空間を $L^{2}(\Omega,\mathcal{D})$ で表す. 特に, μ が Lebesque 測度 m のとき, $L^{2}(\Omega,\mathcal{D})$ を $L^{2}(\mathcal{D})$ と略記する. projection を値にとる可測関数 $R(\cdot)$ に対して, $\{f\in L^{2}(\Omega,,\mathcal{D})\mid R(e^{i\theta})f(e^{i\theta})=f(e^{i\theta})\}$ を $L^{2}(\Omega,\mathcal{D},R(\cdot))$ で表す.

ここで，$\alpha(\cdot),\beta(\cdot)$ は，作用素を値とする強可測な関数で，共に $\alpha(e^{i\theta})\geq 0$，$\beta(e^{i\theta})\geq 0$ で $\sup\{||\alpha(e^{i\theta})||\},\sup\{||\beta(e^{i\theta})||\}<\infty$ であり，$R(e^{i\theta})$ は projection で，

$$R(e^{i\theta})\alpha(e^{i\theta})=\alpha(e^{i\theta})R(e^{i\theta})=\alpha(e^{i\theta}),\ R(e^{i\theta})\beta(e^{i\theta})=\beta(e^{i\theta})R(e^{i\theta})=\beta(e^{i\theta})$$

とする．$\mathcal{P}$ は $L^2(\Omega,\mathcal{D},R(\cdot))$ から，Hardy 空間 $H^2(\mathcal{D},R(\cdot))$ への projection，すなわち，

$$(\mathcal{P}(f))(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}f(z)(z-re^{i\theta})^{-1}dz$$

である．ここで，

$$(\alpha f)(e^{i\theta})=\alpha(e^{i\theta})f(e^{i\theta}),\ (\beta f)(e^{i\theta})=\beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta}),$$

$$(\hat{U}f)(e^{i\theta})=e^{i\theta}f(e^{i\theta})$$

とおく．このとき，

$$\hat{T}=\hat{U}(\alpha\mathcal{P}\alpha+\beta)$$

とすると，$\hat{U}$ は unitary で $\alpha\mathcal{P}\alpha+\beta\geq 0$ であるので $|\hat{T}|=\alpha\mathcal{P}\alpha+\beta$ と置けば，$\hat{T}=\hat{U}|\hat{T}|$ は $\hat{T}$ の polar 分解である．そして

$$(|\hat{T}|f,f)-(\hat{U}|\hat{T}|\hat{U}^*f,f)=(\mathcal{P}\alpha f,\alpha f)-(\hat{U}\mathcal{P}\hat{U}^*\alpha f,\alpha f)\geq 0$$

すなわち，$\hat{T}$ は semi-hyponormal である．ここで $R(\cdot)$ は可分な Hilbert 空間の unitary 作用素の関係から必要なものである．

この逆も成立することを主張するのが，次の構造定理である．

定理 A ([12, Chapter 3, Theorem 3.1]). T は可分な Hilbert 空間上の作用素で，$T=U|T|\in$SHU, すなわち，U は unitary で T は semi-hyponormal 作用素とする．このとき，$L^2(\Omega,\mathcal{D},R(\cdot))$,$\alpha(\cdot),\beta(\cdot)$ が存在し，$\mathcal{P}$ が定義され

$$(\hat{T}f)(e^{i\theta})=e^{i\theta}\Big(\alpha(e^{i\theta})[\mathcal{P}(\alpha f)](e^{i\theta})+\beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\Big),\quad (f\in L^2(\Omega,\mathcal{D},R(\cdot))$$

$$(\hat{U}f)(e^{i\theta})=e^{i\theta}f(e^{i\theta})$$

によって定義された $\hat{T}$ に T, U は $\hat{U}$ に unitary 同値である．

T が p-hyponormal のとき，

$$\tilde{T}=U|T|^{2p}$$

は semi-hypnormal となるので定理 A より，p-hyponormal の次の構造定理が得られる．

定理 B ([3, Theorem 1]). T は可分な Hilbert 空間上の作用素で $T = U|T| \in p$-HU とする．定理 A と同様な記号を使って，$L^2(\Omega, \mathcal{D}, R(\cdot))$,$\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ が存在し，$\mathcal{P}$ が定義され，さらに

$$(\hat{T}f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}(Af)(e^{i\theta}) \quad かつ \quad (\hat{U}f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}f(e^{i\theta})$$

によって定義された $\hat{T}$ と $\hat{U}$ は，それぞれ T と U に unitary 同値である．ただし，

$$(A^{2p}f)(e^{i\theta}) = \alpha(e^{i\theta})[\mathcal{P}(\alpha f)](e^{i\theta}) + \beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta})$$

である．

この $\hat{T}$ を p-hyponormal 作用素 T の singular integral モデルと呼ぶ．

3. characteristic 関数の性質. この節では，$T = U|T| \in p$-HU で，記号 $\alpha(e^{i\theta}) \geq 0$, $\beta(e^{i\theta}) \geq 0$, Hardy 空間 $H^2(\mathcal{D}, R(\cdot))$ は，定理 A,B の T の singular integral モデルの作用素からのもとする．ただし，以下では $R(\cdot)$ は直接現われないので，$H^2(\mathcal{D}) = H^2(\mathcal{D}, R(\cdot))$ で略記する．作用素 S に対して，$\rho(S)$, $\sigma(S)$, $\sigma_a(S)$ および $\sigma_p(S)$ は the resolvent 集合, スペクトル, 近似点スペクトル および 点スペクトルを表す．スペクトルについては次の結果が基礎となる．

定理 C ([13, Chapter 2, Theorem 1.5]). p-hyponormal 作用素 T に対して，

$$\sigma(U|T|_{\pm}^{2p}) \subset \sigma(U|T|^{2p}) \quad かつ \quad \sigma_a(U|T|_{\pm}^{2p}) \subset \sigma_a(U|T|^{2p})$$

が成立する．$T = U|T| \in p$-HU なら，

$$\sigma(U|T|_{\pm}) \subset \sigma(U|T|) \quad かつ \quad \sigma_a(U|T|_{\pm}) \subset \sigma_a(U|T|)$$

である．また，singular integral モデルを使って，

$$(|T|_{+}^{2p}f)(e^{i\theta}) = \left(\alpha(e^{i\theta})^2 + \beta(e^{i\theta})\right) f(e^{i\theta}) \quad \text{and} \quad (|T|_{-}^{2p}f)(e^{i\theta}) = \beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta}).$$

その結果,

$$\alpha^2 = |T|_{+}^{2p} - |T|_{-}^{2p}$$

である．そして，T の characteristic 関数 $W_\ell(e^{i\theta})$ を定義する．

定義 1. $\ell = |\ell|e^{i\theta} \in \rho(U|T|_{-}^{2p})$ に対して, $W_\ell(e^{i\theta})$ を次のように定義する:

$$W_\ell(e^{i\theta}) = I + \alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta}) - \ell e^{-i\theta})^{-1}\alpha(e^{i\theta}).$$

作用素 $W_\ell(e^{i\theta})$ は T の characteristic 関数と呼ばれる. もし $\ell \in \rho(U|T|_-^{2p})$ であるなら, $\ell e^{-i\theta} \in \rho(\beta(e^{i\theta}))$. また, Hardy 空間 $H^2(\mathcal{D})$ の作用素 $\widetilde{W_\ell}$ を次のように定義する:

$$\left(\widetilde{W_\ell}f\right)(\cdot) = \mathcal{P}\left(W_\ell(\cdot)f(\cdot)\right).$$

$\widetilde{W_\ell}$ を W_ℓ の Toeplitz 作用素と呼ぶ. $U|T|^{2p}$ ∈SHU であるので, 次の結果が成立する.

定理 1. $T = U|T| \in p$-HU, $\ell \in \rho(U|T|_-^{2p})$ とする. このとき,

$$\ell \in \sigma_p(U|T|^{2p}) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_p(\widetilde{W_\ell}) \quad \text{かつ} \quad \bar{\ell} \in \sigma_p((U|T|^{2p})^*) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_p((\widetilde{W_\ell})^*).$$

写像 $L_\ell : h \longrightarrow (\ell e^{-i\theta} - \beta)^{-1}\alpha h$ は $\ker(\widetilde{W_\ell})$ から $\ker(U|T|^{2p} - \ell)$ への 1 : 1 写像で, 逆写像は $f \longrightarrow \mathcal{P}(\alpha f)$.

写像 $^*L_\ell : h \longrightarrow (\bar{\ell}e^{i\theta} - \beta)^{-1}\alpha h$ は $\ker((\widetilde{W_\ell})^*)$ から $\ker((U|T|^{2p})^* - \ell))$ への 1 : 1 写像で, 逆写像は $f \longrightarrow (\mathcal{P}\alpha U^*)(f)$.

$\ell \in \sigma_p(U|T|^{2p})$ のとき, ℓ の重複度は $\widetilde{W_\ell}$ の固有値 0 の重複度に等しい.
また, $\bar{\ell} \in \sigma_p((U|T|^{2p})^*))$ のとき, $\bar{\ell}$ の重複度は $(\widetilde{W_\ell})^*)$ の固有値 0 の重複度に等しい.

Berberian の方法によって, $\mathcal{R} \supset \mathcal{H}$ を作り, 自然な写像 $B(\mathcal{H}) \longrightarrow B(\mathcal{R})$ を π で書く. $\mathcal{H}$ 上の作用素 S に対して, $\sigma_a(S) = \sigma_p(\pi(S))$ が成立する. $\ker(\pi(T - \ell))$ の次元を ℓ の近似重複度と呼ぶ. そして, 次の結果を得る.

定理 2. $T = U|T| \in p$-HU で, $\ell \in \rho(U|T|_-^{2p})$ とする. このとき,

$$\ell \in \sigma_a(U|T|^{2p}) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_a(\widetilde{W_\ell}) \quad \text{かつ} \quad \bar{\ell} \in \sigma_a((U|T|^{2p})^*) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_a((\widetilde{W_\ell})^*).$$

写像 $\pi(L_\ell)$ は $\ker(\pi(\widetilde{W_\ell}))$ から $\ker(\pi(U|T|^{2p} - \ell))$ への有界で 1 : 1 であり, 逆写像も有界である. 写像 $\pi(M_\ell)$ は $\ker(\pi((\widetilde{W_\ell})^*))$ から $\ker(\pi((U|T|^{2p})^* - \bar{\ell}))$ への有界で 1 : 1 であり, 逆写像も有界である. $\ell \in \sigma_a(U|T|^{2p})$ のとき, ℓ の近似重複度は, $\widetilde{W_\ell}$ の 0 の近似重複度に等しい.

$\bar{\ell} \in \sigma_a(U|T|^{2p})^*$ のとき, $\bar{\ell}$ の近似重複度は, $(\widetilde{W_\ell})^*$ の 0 の近似重複度に等しい. 定理 3, 4 のために, 次の結果がキーとなる.

定理 D ([2, Theorem 4]). $T = U|T|$ を p-hyponormal とする. もし $(T - re^{i\theta})f_n \longrightarrow 0$ のとき, $(|T| - r)f_n \longrightarrow 0$ かつ $(U - e^{i\theta})f_n \longrightarrow 0$ が成立する.

定理 3. $T = U|T| \in p$-HU とし，$\ell = |\ell|e^{i\omega}$ とする．

(1) $\ell \in \rho(U|T|^{2p}_{-})$ とし，$\{h_n\}$ は $H^2(\mathcal{D})$ の単位ベクトルから成り立ち，$\widetilde{W_\ell} h_n \longrightarrow 0$ とする．このとき，$|\ell|^{\frac{1}{2p}} e^{i\omega} \in \sigma_a(T)$ かつ $\|(T - |\ell|^{\frac{1}{2p}} e^{i\omega}) f_n\| \longrightarrow 0$ となる．ここで，十分大きな n に対して，$f_n = \dfrac{L_\ell h_n}{\|L_\ell h_n\|}$ とする．

(2) もし $\ell \in \sigma_a(T)$, $\ell_p \in \rho(U|T|^{2p}_{-})$ で $\{f_n\}$ は $H^2(\mathcal{D})$ の単位ベクトルの列で $\|(T - \ell) f_n\| \longrightarrow 0$ が成り立つとき，$\widetilde{W_{\ell_p}} h_n \longrightarrow 0$ かつ $\|f_n - \dfrac{L_{\ell_p} h_n}{\|L_{\ell_p} h_n\|}\| \longrightarrow 0$ を満たす $H^2(\mathcal{D})$ の単位ベクトルの列が存在する．ここで，$\ell_p = |\ell|^{2p} e^{i\omega}$.

定理 4. $T = U|T| \in p$-HU とし，$\ell = |\ell|e^{i\omega}$ で表し，$\ell_p = |\ell|^{2p} e^{i\omega} \in \rho(U|T|^{2p}_{-})$ とする．このとき，

$$\ell \in \sigma(T) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma(\widetilde{W_{\ell_p}}) \quad \text{かつ} \quad \bar{\ell} \in \sigma(T^*) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma((\widetilde{W_{\ell_p}})^*).$$

4. 作用素の行列式と積分公式. 作用素の行列式と積分公式のために，次の定理を準備する．

定理 E ([13, Chapter 3,Theorem 2.5]). $T \in$-SHU とする．このとき，2 変数の $L(\mathcal{D})$ に値を取る mosaic と呼ばれる次の性質を持つ可測関数 $B_T(e^{i\theta}, \rho)$ が存在する．

(1) $0 \leq B_T(e^{i\theta}, \rho) \leq I$,

(2) $I + \alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta}) - \ell)^{-1}\alpha(e^{i\theta}) = \exp\Big(\displaystyle\int_0^\infty \frac{B_T(e^{i\theta}, \rho)}{\rho - \ell} d\rho\Big)$,

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \psi(\rho) B_T(e^{i\theta}, \rho) d\rho = \alpha(e^{i\theta}) \int_0^1 \psi\Big(\beta(e^{i\theta}) + k\alpha(e^{i\theta})^2\Big) dk \cdot \alpha(e^{i\theta})$

ここで ψ は有界な任意の Baire 関数である．

この mosaic を用いて Pincus principal 関数を次のように定義する．

定義 2. $T = U|T| \in p$-HU に対して，$T_p = U|T|^{2p}$ と置く．$T_p \in$ SHU なので，Pincus principal 関数 $g_T(\cdot, \cdot)$ を

$$g_T(e^{i\theta}, r) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{B}_{T_p}(e^{i\theta}, r^{2p})\right),$$

によって定義する．ただし，$\mathrm{Tr}\,(\cdot)$ は $L(\mathcal{D})$ のトレースを表す．

$\mathrm{Tr}(|T|) < \infty$ を満たす $T \in L(\mathcal{D})$ 全体，すなわち，トレース・クラスを $\mathcal{C}_1$ で表す．

定義 3. unitary 作用素 U で $T = U|T|$ と表され，$[U, |T|^{2p}] = U|T|^{2p} - |T|^{2p}U \in \mathcal{C}_1$ のとき，T を p-nearly normal と呼ぶ．

定義 4. $K \in \mathcal{C}_1$ に対して，$(I-K)$ の行列式 $\det(I-K)$ を

$$\det(I-K) = \prod_{j=1}^{\nu(K)} (1-\lambda_j(K)),$$

によって定義する．ただし，$\{\lambda_j(K)\}_{j=1}^{\nu(K)}$ は K のゼロでない固有値を重複度分数える ([9, p.157]).

もし K^{-1} が存在すときは, $\det(I-K)$ は, Xia のそれに一致する ([13, p.175]). $ABA^{-1}B^{-1}$ を $\{A,B\}$ と書き，multiplicative commutator と呼ぶ．$\{e^A, e^B\}$ について，次の結果が知られている．

Theorem F ([13, Chapter 7, Lemma 4.1]). $A, B \in B(\mathcal{D})$ かつ $[A,B] \in \mathcal{C}_1$ のとき，$\{e^A, e^B\} \in \mathcal{C}_1$ で,

$$\det\left(\{e^A, e^B\}\right) = \exp\left(\mathrm{Tr}[A,B]\right).$$

$T = U|T| \in$SHU とする．このとき，$\mathrm{Im}\,\ell > 0$ である ℓ に対して，ほとんど全ての $e^{i\theta} \in \mathbf{T}$ で,

$$I + \alpha(e^{i\theta})\left(\beta(e^{i\theta}) - \ell\right)^{-1}\alpha(e^{i\theta}) = \exp\left(\int_{\sigma(|T|)} \frac{\mathrm{B}_{T_p}(e^{i\theta},\rho)}{\rho - \ell} d\rho\right).$$

上記の作用素の determinant は次の定理で与えられる．

定理 5. $T \in p$-HU で p-nearly normal のとき, ほとんど全ての $e^{i\theta} \in \mathbf{T}$ で,

$$\det\left(I + \alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta}) - \ell)^{-1}\alpha(e^{i\theta})\right) = \exp\left(2p\int_{\sigma(|T|)} \frac{r^{2p-1}\cdot g_T(e^{i\theta}, r)}{r^{2p}-\ell} dr\right).$$

次に，$\mathcal{A}_2$ は 2 変数 r, z の Laurent 多項式環であり $p(r,z) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=-N}^{N} a_{jk}\cdot r^j z^k$ とする．ここで N は正の整数で a_{jk} は定数である．X, Y は作用素で，特に Y は Y^{-1} を持つとする．$p(r,z) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=-N}^{N} a_{jk}\cdot r^j z^k \in \mathcal{A}_2$ に対して,

$$p(X,Y) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=-N}^{N} a_{jk}\cdot X^j Y^k$$

と定義する．$p, q \in \mathcal{A}_2$ の Jacobian は $J(p, q)$ とする．すなわち，

$$J(p,q)(r,e^{i\theta}) = \frac{\partial p}{\partial r}(r,e^{i\theta}) \cdot \frac{\partial q}{\partial z}(r,e^{i\theta}) - \frac{\partial p}{\partial z}(r,e^{i\theta}) \cdot \frac{\partial q}{\partial r}(r,e^{i\theta}).$$

このとき次の結果が成立する．

定理 G ([3, Theorem 10]). n を正の整数，$T = U|T| \in \frac{1}{2n}$-HU とする．$T$ が $\frac{1}{2n}$-nearly normal のとき，$p, q \in \mathcal{A}_2$ 対して，

$$\mathrm{Tr}\Big([p(|T|,U), q(|T|,U)]\Big) = \int\int_{\sigma(T)} J(p,q)(r,e^{i\theta})e^{i\theta}g_T(e^{i\theta},r)drdm(\theta)$$

が成立する．

最後に，次の結果が得られる．

定理 6. n を正の整数，$T = U|T| \in \frac{1}{2n}$-HU とする． T が $\frac{1}{2n}$-nearly normal のとき，$p, q \in \mathcal{A}_2$ 対して，

$$\det\Big(\{\exp(p(|T|,U)), \exp(q(|T|,U))\}\Big) = \exp\Big(\mathrm{Tr}\left([p(|T|,U), q(|T|,q)]\right)\Big)$$

$$= \exp\left(\int\int_{\sigma(T)} J(p,q)(r,e^{i\theta})e^{i\theta}g_T(e^{i\theta},r)drdm(\theta)\right)$$

が成立する．

References

[1] A. Aluthge, On p-hyponormal operator for $0 < p < 1$, *Integr. Equat. Oper. Th.* **13**(1990), 307-315.

[2] M. Chō and T. Huruya, p-hyponormal operators for $0 < p < 1/2$, *Commentationes Math.* **33**(1993), 23-29.

[3] M. Chō and T. Huruya, Trace formulae of p-hyponormal operators, *Studia Math.* **161**(2004), 1-18.

[4] M. Chō, T. Huruya, Determinants of characteristic functions of p-hyponormal operators, to appear in *Math. Proc. Royal Irish Acad.*

[5] M. Chō, T. Huruya and M. Itoh, Singular integral models for p-hyponormal operators and the Riemann-Hilbert problem, *Studia Math.* **130**(1998), 213-221.

[6] M. Chō, T. Huruya and M. Itoh, Riemann-Hilbert problem for characteristic functions of p-hyponormal operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **64**(1998), 271-279.

[7] M. Chō, T. Huruya and C. Li, Trace formulae associated with the polar decomposition of operators, *Math. Proc. Royal Irish Acad.* **105**(2005), 57-69.

[8] M. Chō and M. Itoh, On spectra of p-hyponormal operators, *Integr. Equat. Oper. Th.* **23**(1995), 287-293.

[9] I.C. Goberg and M.G. Krein, Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, *Transl. Math. Monographs*, **18**, Amer. Math. Soc., Providence (1969).

[10] M. Martin and M. Putinar, *Lectures on Hyponormal operators*, Birkhäuser Verlag, Basel (1989).

[11] J.D. Pincus and D. Xia, Mosaic and principal function of hyponormal and semi-hyponormal operators, *Integr. Equat. Oper. Th.* **4**(1981), 134-150.

[12] D. Xia, On the non-normal operators – semi-hyponormal operators, *Sci. Sinica* **23**(1980), 700-713.

[13] D. Xia, *Spectral theory of hyponormal operators*, Birkhäuser Verlag, Basel (1983).